

学校编码: 10384

分类号 \_\_\_\_\_ 密级 \_\_\_\_\_

学号: 23020121152946

UDC \_\_\_\_\_

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

Voronoi剖分和三角剖分上的分片多项式  
逼近方法

Piecewise Polynomials Approximation Method  
Based on Voronoi Tessellation and Triangulation

肖艳阳

指导教师姓名: 陈中贵 副教授

专 业 名 称: 计算机应用技术

论文提交日期: 2015 年 4 月

论文答辩日期: 2015 年 5 月

学位授予日期: 2015 年 6 月

答辩委员会主席: \_\_\_\_\_

评 阅 人: \_\_\_\_\_

2015 年 4 月

厦门大学博硕士论文摘要库

## 厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为( )课题(组)的研究成果,获得( )课题(组)经费或实验室的资助,在( )实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

## 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于

(     )1、经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于     年     月     日解密，解密后适用上述授权。

(     )2、不保密，适用上述授权。

( 请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。 )

声明人（签名）：

年     月     日

厦门大学博硕士论文摘要库

## 摘 要

分片逼近问题是函数逼近论的重要组成部分，它不仅是应用数学所关心的一类问题，在计算机图形学领域也有许多应用。本文聚焦于在二维区域上利用多项式构建逼近函数来处理分片逼近问题，其中，区域的分割结构采用了简单的Voronoi剖分和三角剖分。我们将原函数与逼近函数之间的二次误差作为度量方法，在每个子区域上通过求解一个最小二乘问题得到该子域上的最优逼近多项式，从而提出用以衡量逼近程度的目标函数。因此，可将分片逼近问题转化成求解目标函数的极小值解。本文针对Voronoi剖分和三角剖分两种结构提出形式和几何意义都类似的目标函数，然而函数的优化过程却完全不同。对于Voronoi剖分，目标函数仅与Voronoi节点的位置相关，此时，文中采用一种与梯度下降法类似的新颖的函数优化方法，并显式地推导出目标函数的梯度公式，据此，可以高效地求解目标函数的极小值对应的剖分状态。而对于三角剖分，目标函数不仅与顶点的位置相关，还与顶点之间的连接关系有关。此时，文中采用了另外一种优化方法——牛顿迭代法，它需要到目标函数的一阶导和二阶导信息。因此，我们推导出相应的梯度和Hessian矩阵求解公式。

本文提出的基于该两类剖分的分片多项式逼近方法对不连续函数具有较其他方法更强的逼近能力，因此我们将该方法应用在图像逼近领域。为了验证该方法的有效性，我们分别在解析函数和彩色图像上进行实验，实验结果表明，该方法在Voronoi剖分和三角剖分上均获得了良好的剖分结果，能够有效保持被逼近函数的大量特征信息。

**关键词：** Voronoi剖分；三角剖分；分片多项式逼近；图像逼近；优化算法

厦门大学博硕士论文摘要库



## Abstract

The research of piecewise approximation is one of the most important part of the theory of function approximation, it is not only of importance in applied mathematics, but also at the core of many applications in graphics. Herein, we focus in handling the problem of piecewise approximation by using polynomials to construct the approximating function, while the flexible Voronoi tessellation and triangulation are adopted to partition the 2D domain. We use the  $L^2$  metric that measures the distance between target function and approximating function to construct the objective function which tells how concisely the approximation is, while a minimizer of a least-squares problem is conducted to obtain the optimal polynomials over each sub-domain. This allows us convert the aim of the approximation problem to minimizing the objective function. Based on different partition structures, Voronoi tessellation and triangulation, we propose two distinct objective functions which are similar in form and geometric meaning, while the optimization proceeds of minimizing are completely different. For the situation when Voronoi diagram is adopted, the objective function is only associated with points' position, we provide the explicit formula of the gradient of the objective function, which makes an efficient gradient-based algorithm workable for the function minimization responding to the optimal distribution of Voronoi sites. When a triangulation divides the domain, the positions and connectivity of the triangulation both influence significantly the objective function, and we use another effective optimization algorithm, Newton's method, which needs the information of gradient and Hessian of the objective function those have been deducted herein to attain the optimal solution.

It is worth to point out that our piecewise polynomials approximation method based on Voronoi tessellation and triangulation possess the strong ability of approximating piecewise functions, which helps us to apply our method to image approximation. To demonstrate the efficacy of our new approach, we conduct several experiments for generating piecewise polynomials approximation of ana-

lytic functions and color images, and the results show that the resultant partitions are as favorable as that most features of the target function are maintained.

**Keywords:** Voronoi tessellation; triangulation; piecewise polynomials approximation; image approximation; optimization algorithm

厦门大学博硕士论文摘要库

# 目 录

中文摘要	I
英文摘要	III
目录	V
<b>第一章 引言</b>	<b>1</b>
1.1 背景	1
1.2 国内外发展现状	2
1.3 本文工作	3
1.4 论文结构安排	4
<b>第二章 理论基础</b>	<b>5</b>
2.1 Voronoi剖分	5
2.2 Delaunay三角化	6
2.3 峰值信噪比	7
<b>第三章 Voronoi剖分上的分片多项式逼近方法</b>	<b>9</b>
3.1 问题描述	9
3.2 数学模型	9
3.3 优化算法	12
3.4 多重逼近	16
3.5 实验结果	17
3.6 比较	27
3.7 时间统计	27

<b>第四章 三角剖分上的分片多项式逼近方法</b>	<b>29</b>
4.1 数学模型 . . . . .	29
4.2 优化算法 . . . . .	38
4.3 实验结果 . . . . .	44
4.4 比较 . . . . .	48
4.5 时间统计 . . . . .	52
<b>第五章 结论及研究展望</b>	<b>55</b>
5.1 总结 . . . . .	55
5.2 研究展望 . . . . .	56
<b>参考文献</b>	<b>59</b>
<b>硕士期间发表文章目录</b>	<b>63</b>
<b>致谢</b>	<b>65</b>
<b>附录 A 更多实验结果</b>	<b>67</b>

## Contents

<b>Chinese Abstract</b>	<b>I</b>
<b>English Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Contents</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Physical Background . . . . .	1
1.2 Related Works . . . . .	2
1.3 Our Contributions . . . . .	3
1.4 Article Arrangement . . . . .	4
<b>2 Basic Theories</b>	<b>5</b>
2.1 Voronoi Tessellation . . . . .	5
2.2 Delaunay Triangulation . . . . .	6
2.3 Peak Signal-to-Noise Ratio . . . . .	7
<b>3 Approximation by Piecewise Polynomials on Voronoi Tessellation</b>	<b>9</b>
3.1 Problem Description . . . . .	9
3.2 Mathematical Model . . . . .	9
3.3 Solution Mechanism . . . . .	12
3.4 Multiple Approximation . . . . .	16
3.5 Experimental Results . . . . .	17
3.6 Comparison . . . . .	27
3.7 Time Statistics . . . . .	27

## CONTENTS

---

<b>4</b>	<b>Approximation by Piecewise Polynomials on Triangulation</b>	<b>29</b>
4.1	Mathematical Model . . . . .	29
4.2	Solution Mechanism . . . . .	38
4.3	Experimental Results . . . . .	44
4.4	Comparison . . . . .	48
4.5	Time Statistics . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusion and Future Work</b>	<b>55</b>
5.1	Conclusion . . . . .	55
5.2	Future Work . . . . .	56
	<b>References</b>	<b>59</b>
	<b>Publications and Work</b>	<b>63</b>
	<b>Acknowledgement</b>	<b>65</b>
	<b>Appendix A More Experimental Results</b>	<b>67</b>

## 第一章 引言

### 1.1 背景

精确地逼近一个给定函数在应用数学和图形学领域都具有重要作用。函数逼近问题一般是指，对任意给定的一个函数，在其定义域上构造一个逼近函数，使得原函数与逼近函数之间尽可能一致。度量这种逼近程度的方法通常是计算两个函数的误差，称为逼近误差，该值越小，说明逼近函数越接近于原函数。在本文中，我们采用常用的 $L^2$ 范数来计算逼近误差。考虑到在原函数定义域上只构建一个逼近函数可能导致逼近误差较大，因此分片逼近成为研究这类问题的一种常用方法。此时，将定义域划分成多个子区域，并且在误差较大的区域上划分成更多的子区域可以明显地降低逼近误差。如何简便地构造出一致程度较好的逼近函数是逼近问题的关键。由于多项式具有简易性和灵活性的特点，利用多项式构建逼近函数是一个简单有效的方法[1]。

对于分片多项式逼近来说，区域的分割结果和函数逼近空间（即多项式的阶次）是影响逼近质量的主要因素。当剖分的数量和多项式的阶次都给定之后，逼近问题实际上转化为如何划分区域。一般来说，区域的划分是指将其分割为非重合且相邻的若干个子区域。良好的划分结果能够保持被逼近函数的大部分特征。一旦完成对区域的划分后，最优的逼近多项式可以通过求解一个最小二乘问题得到，因此在区域上产生一个良好的剖分结果是分片逼近问题的关键所在。

决定一个二变量函数对应的曲面是否可以在一个预先指定的误差条件下用多面体曲面来逼近是一个NP难的问题[2]。如上所述，一种启发式的方法是在误差较大的区域上不断细分成更多的子区域，但是这将导致分片数量过多的剖分[3]。当区域的离散表示给定之后，如文献[4]中的图像和[5, 6]中的三角网格，可以用一种浮动的方法聚合成像素簇或者三角形集合，从而形成对区域的剖分，这实际上是对因构造多项式产生的逼近误差求解极小值。

本文提出的方法聚焦于在二维区域上获取原函数的最优分片多项式逼近结果，并且适用于连续和离散区域。不同于形成像素簇或三角形簇的方法，它们产生的剖分结构大都是不规则的，为了简化计算，我们采用简单的容易表达的

几何结构来划分区域。本文分别在Voronoi剖分和三角剖分上讨论了分片多项式逼近方法，并分别采用不同的优化算法来寻找最优逼近对应的剖分形态。

## 1.2 国内外发展现状

### 1.2.1 多项式逼近

关于利用多项式逼近一个给定函数的问题，在Powell的著作[1]中进行了深入的探讨，同时提出了许多高效的算法。然而，大多数的方法都只能处理单变量的函数逼近问题，利用多变量的多项式去逼近函数是更加普遍的问题，同时更加复杂[7]。当使用正交基构建逼近多项式时，Fedele和Ferrise[8]提出的方法可以处理最小二乘逼近问题。Gram-Schmidt正交化可以构建出单变量的正交多项式，但在多变量的情况下还面临许多数学和算法上的困难。目前，二变量的正交多项式可以在一些特殊的区域上建立，例如正六边形区域[9]和三角形区域[10]。在任意形状的区域上构造多变量的正交多项式仍然存在困难，因此本文采用了幂基多项式。当多项式的阶次较低时，无论剖分结构是Voronoi剖分还是三角剖分，本文的算法在实验中均能够获得良好的逼近结果和数值稳定性。

### 1.2.2 曲面逼近

Cohen-Steiner等[5]针对网格曲面提出了一种变分的构造线性逼近函数的算法框架。该算法不断地调整区域的剖分和为每个分片寻找最优的拟合平面，通过这种方式逐渐减小逼近误差。该方法将网格的面片聚集在不同的分片上从而形成剖分结构，同时，该方法提出了几个变量使其能够包含更多的几何元素，从而提高逼近质量。Yan等[6]则将[5]的方法推广到一般的二次曲面上。在[11]中，网格的划分方法是通过将其拟合到椭球面区域上再优化得到。本文的方法在某种程度上与[5]的框架类似，但是我们的方法能够同时优化区域的剖分和每个分片对应的拟合形状，这主要是由于本文采用的剖分结构——Voronoi剖分和三角剖分都是容易表达的。我们的优化算法很自然地包含了剖分结构的优化。

### 1.2.3 图像逼近

目前，已经有许多方法能够根据图像特征自动提取出相应的几何结构，使得图像能够有效地由该几何结构表达出来。通过区域分割算法或边缘检测算法，矢量曲线或其他几何元素用来拟合图像的像素簇。由于图像不同部分的颜



Degree papers are in the “[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)”.

Fulltexts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to [etd@xmu.edu.cn](mailto:etd@xmu.edu.cn) for delivery details.